数学腕だめしコンテスト解答例

問１　３桁の整数として２７７（桐生市の市外局番の後の３桁）を選んだとします．ひっくり返して７７２，差をとって７７２−２７７＝４９５．もう一度ひっくり返して，今度は和をとると，５９４＋４９５＝１０８９．

問２の解答に進む前に基本事項です．　３桁の整数が「X Y Z」と書かれたとします．X が 100 の位，Y が 10 の位，Z が 1 の位で，X は１以上 9 以下の整数，Y, Z は０以上 9 以下の整数です．このとき，この３桁の整数を式で表すと，100 X +10 Y +Z となります．また，100 以上 999 以下の整数は必ず 100 X +10 Y +Z（X は１以上 9 以下の整数，Y, Z は０以上 9 以下の整数）の形で表されて，X が 100 の位，Y が 10 の位，Z が 1 の位の数となります．

では問２，桐子の最後の会話を証明しましょう．最初の３桁の整数を「a b c」とします．基本事項から「a b c」= 100 a +10 b +c です．「a b c」をひっくり返した「c b a」は「c b a」= 100 c +10 b +a となります．これら２つの整数の差をとる，つまり大きい方から小さい方を引き算します．ここで「１の位の数と１００の位の数の差が２以上」の条件を思い出すと，a ＞ c ＋ 1 またはｃ ＞ a ＋ 1 のどちらかが成立します．ではまず，

　　a ＞ c ＋ 1・・・(＊)　　　　　　を仮定しましょう．このときは，ひっくり返す前の整数「a b c」がひっくり返した後の整数「c b a」よりも大きく，

　　「a b c」−「c b a」= 100 a +10 b +c - (100 c +10 b +a) = 100(a−c) + c−a

となります．

さて，差をとってできた新しい３桁の整数は，最初の基本事項により，100 の位が a−c，10 の位が 0 で 1 の位が c−a となりそうですが，ここで注意して下さい．1 の位の c−a は仮定（＊）から負になってしまいます．各位の数字は０以上 9 以下の整数です．そこで小学校の算数以来，誰もが使っている「引き算の繰り下がり」を思い出して下さい．１の位が負になりそうになったら，左隣の 10 の位から 10 を借りてきます．ところが 10 の位も今は０です．そこで，まずは 10 の位が左隣の 100 の位から 100=10×10 を借りてきます．つまり，

　　「a b c」−「c b a」= 100(a−c−1) + 10×10 + c−a.

次に 1 の位が 10 の位から 10 を借りてきます．つまり，

　　「a b c」−「c b a」= 100(a−c−1) + 10×9 + c−a+10・・・・・(＊＊)

これで，差をとってできた新しい３桁の整数の 1 の位が c−a+10 に，よって正となりました．10 の位は 9，100 の位の a−c−1 は仮定（＊）より正です．（このような巧妙な計算を皆さんは，数字の入った実際の筆算で，ほとんど意識せずにこなしているのです．）

ここまで来ればあと少しです．この３桁の数（＊＊）をひっくり返すと

$100(c-a+10) + 10\times 9 + a-c-1$ 　となります．最後に（＊＊）との和をとって

$$100(c-a+10) + 10\times 9 + a-c-1 + 100(a-c-1) + 10\times 9 + c-a+10$$
$$= 100\times 9 + 10\times 18 + 9 = 1089$$

となって，証明完了です．

なお，仮定（＊）のかわりに $c > a + 1$ を仮定した場合，ひっくり返した「ｃｂａ」が最初の３桁の整数「ａｂｃ」よりも大きいので，差は「ｃｂａ」－「ａｂｃ」$= 100(c-a) + a-c$ となります．以下，ａとｃを入れかえて同様な証明が成り立ちます．

他の証明（概略）「ａｂｃ」－「ｃｂａ」$= 100(a-c) + c-a = 99(a-c)$．仮定（＊）では $a-c$ は２以上９以下．したがって 99×2，99×3，・・・，99×9 の計８個の数について，それぞれひっくり返したものを加えて 1089 となることを確かめる証明も可です．

さて，この問題は 1089 問題とか言われて，外国ではそれなりに有名です．1089 をタイトルにもつ数学書（洋書）もあります（https://academic.oup.com/book/53963）．今回は３桁の整数から始めましたが，4 桁の整数から始めて，同様な操作を行う（ひっくり返して，差をとって，またひっくり返して和をとる）とどうなるか？　4 桁の整数から始めた場合も，各位の数の大小関係で場合分けをすることで，一定のルールが見つかります．ともかく，皆さんに考えてもらった問題は，いろいろと拡張もできて奥が深いといえます．ぜひ，4 桁の場合も楽しんで考えてみて下さい．

数学腕だめしコンテストに応募してくれた皆さんへ．たくさんの御応募ありがとうございました．その中で，文字式を使いながらも繰り下がりに気が付いて，問題の本質を理解した答案もかなり見受けられました．一方，自分ではわかっているつもりでも，その内容を相手に的確に伝えることが重要です．自分で論理を組み立てる力とともに，それを発信できるコミュニケーション力，その繰り返しが今後，皆さんの数学の腕を磨いていくものと信じています．

次ページに，文字を使った筆算で問２を試した例をあげます（ただし $a > c + 1$ の場合）．なぜこの筆算が正しいかというと，上で示した解答が拠り所となります．

3桁の整数「a b c」　ただし $a > c+1$

ひっくり返して差をとると、

$$
\begin{array}{rccc}
 & a & b & c \\
- & c & b & a \\
\hline
\end{array}
$$

↓

$$
\begin{array}{rccc}
 & a & b-1 & c \\
- & c & b & a \\
\hline
 & & & 10-a+c
\end{array}
$$

↓

$$
\begin{array}{rccc}
 & a-1 & b-1 & c \\
- & c & b & a \\
\hline
 & & 9 & 10-a+c
\end{array}
$$

↓

$$
\begin{array}{rccc}
 & a-1 & b-1 & c \\
- & c & b & a \\
\hline
 & a-1-c & 9 & 10-a+c
\end{array}
$$

↓

↓

次にひっくり返して和をとると

$$
\begin{array}{rccc}
 & \cancel{a}-\cancel{1}-\cancel{c} & 9 & 10-\cancel{a}+\cancel{c} \\
+ & 10-\cancel{a}+\cancel{c} & 9 & \cancel{a}-1-\cancel{c} \\
\hline
 & 10 & 8 & 9
\end{array}
$$