

数 学

氏名	
----	--

受験番号	
------	--

- 1 p, q を実数の定数とする。3次方程式 $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ が虚数解 α と $\frac{1}{\alpha}$ をもつとき、以下の問いに答えよ。
- (1) $p = q$ が成り立つことを示せ。
 - (2) 定数 p の値の範囲を求めよ。
 - (3) α の実部 s 、虚部 t について $s + 2t = -1$ が成り立つときの p の値を求めよ。

[解答欄]

(1) 題意より $\begin{cases} \alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha^{-3} + p\alpha^{-2} + q\alpha^{-1} + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{2} \times \alpha^3$ より $1 + p\alpha + q\alpha^2 + \alpha^3 = 0$

$\textcircled{1}$ との差をとり $p(\alpha^2 - \alpha) + q(\alpha - \alpha^2) = 0$ $\dots \textcircled{3}$

α は虚数であるので $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) \neq 0$ 。したがって $\textcircled{3}$ より $p - q = 0$
よって $p = q$ 。

(2) $p = q$ のとき、3次方程式は

$$\begin{aligned} x^3 + p(x^2 + x) + 1 &= (x+1)(x^2 - x + 1) + px(x+1) \\ &= (x+1)(x^2 + (p-1)x + 1) = 0 \end{aligned}$$

この虚数解は $x^2 + (p-1)x + 1 = 0$ $\dots \textcircled{4}$ の解であらねばならず、

虚数解をもつ $\iff D = (p-1)^2 - 4 = (p-3)(p+1) < 0 \iff -1 < p < 3$

$\textcircled{4}$ の解を α, β とするとき、解と係数の関係より $\alpha\beta = 1$ 。
よって虚数解は α と $\frac{1}{\alpha}$ となる。

(3) $\textcircled{4}$ の解は $\alpha = s + it$ とその共役な複素数 $\bar{\alpha} = s - it$ である。再び $\textcircled{4}$ の解と係数の関係より

$$\alpha\bar{\alpha} = (s+it)(s-it) = s^2 + t^2 = 1 \dots \textcircled{5}$$

$s + 2t = -1$ より $s = -(2t+1)$ 。 $\textcircled{5}$ に代入し

$$(2t+1)^2 + t^2 = 5t^2 + 4t + 1 = 1 \quad \text{よって} \quad 5t^2 + 4t = t(5t+4) = 0$$

α は虚数解より $t \neq 0$ 。ゆえに $t = \frac{-4}{5}$ 。このとき $s = -(2t+1) = \frac{3}{5}$ 。

$\textcircled{4}$ の解と係数の関係より $\alpha + \bar{\alpha} = 2s = \frac{6}{5} = -(p-1)$

よって $p = \frac{-1}{5}$ 。

得点	
----	--

数 学

氏名

受験
番号

2

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。すべての自然数 n に対して a_n, b_n はともに整数で, $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。
 (2) a_{n+1}, b_{n+1} それぞれを, a_n と b_n を用いて表せ。
 (3) n を自然数とすると, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n$ を示せ。
 (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

[解答欄]

$$(1) 3+2\sqrt{2} = a_1 + \sqrt{2}b_1. \quad a_1, b_1 \text{ は整数より } a_1=3, b_1=2.$$

$$(3+2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2} = a_2 + \sqrt{2}b_2. \quad a_2, b_2 \text{ は整数}$$

$$\text{より } a_2=17, b_2=12.$$

$$(2) a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} = (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})^n (3+2\sqrt{2})$$

$$= (a_n + \sqrt{2}b_n)(3+2\sqrt{2}) = 3a_n + 4b_n + \sqrt{2}(2a_n + 3b_n)$$

ここで $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ は整数なので,

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n.$$

$$(3) n=1 \text{ のときは } a_1=3, b_1=2 \text{ より成立. } n=k \text{ のとき成立,}$$

すなわち $(3-2\sqrt{2})^k = a_k - \sqrt{2}b_k$ と仮定する. このとき

$$(3-2\sqrt{2})^{k+1} = (3-2\sqrt{2})^k (3-2\sqrt{2}) = (a_k - \sqrt{2}b_k)(3-2\sqrt{2})$$

$$= 3a_k + 4b_k - \sqrt{2}(2a_k + 3b_k)$$

$$(2) \text{ より } = a_{k+1} - \sqrt{2}b_{k+1} \quad \text{よって } n=k+1 \text{ のときにも成立.}$$

ゆえにすべての自然数 n についても成立.

$$(4) \begin{cases} (3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n \\ (3-2\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \{ (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \} \\ b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \} \end{cases}$$

$$\text{ゆえに } \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n} = \sqrt{2} \frac{1 + \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n}$$

$$0 < \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n = 0 \quad \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

得
点

氏名	
----	--

受験番号	
------	--

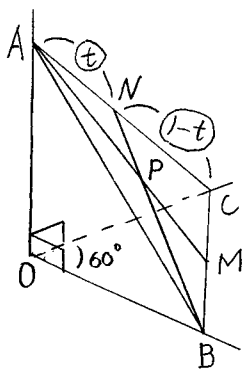
3 四面体 OABC は次の 2 条件を満たすとする。

1. $OA = OB = OC = 1$
2. $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$

辺 BC の中点を M, 辺 AC を $t : (1-t)$ に内分する点を N とおき, 線分 AM と線分 BN との交点を P とおく。ただし, t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} および t を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, \overrightarrow{BN} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} および t を用いて表せ。
- (3) $OP \perp BN$ のとき, t の値を求めよ。

[解答欄]



(1) $\triangle ABC$ は $AB = AC = \sqrt{2}$ の二等辺三角形, AM は $\angle BAC$ の二等分線となるから

$$BP : PN = AB : AN = 1 : t$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AN} + t\overrightarrow{AB}}{1+t} = \frac{t\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}}{1+t}$$

$$(2) \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$= t(\vec{c} - \vec{a}) - (\vec{b} - \vec{a}) = (1-t)\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}$$

$$(3) \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{t(\vec{c} - \vec{a}) + t(\vec{b} - \vec{a})}{1+t} \quad ((1)より)$$

$$= \frac{1-t}{1+t} \vec{a} + \frac{t}{1+t} (\vec{b} + \vec{c})$$

$OP \perp BN$ より 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ となるように t を定めればよい。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = \left\{ \frac{1-t}{1+t} \vec{a} + \frac{t}{1+t} (\vec{b} + \vec{c}) \right\} \cdot \left\{ (1-t)\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c} \right\}$$

ここで四面体 OABC の条件より $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. これを上式の展開でもらえると

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{(1-t)^2}{1+t} |\vec{a}|^2 - \frac{t}{1+t} |\vec{b}|^2 + \frac{t^2}{1+t} |\vec{c}|^2 + \left(\frac{t^2}{1+t} - \frac{t}{1+t} \right) \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$= \frac{1}{1+t} \left\{ (1-t)^2 - t + t^2 + \frac{1}{2}(t^2 - t) \right\}$$

$$= \frac{1}{1+t} \left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 \right) = \frac{1}{2(1+t)} (5t^2 - 7t + 2)$$

$$= \frac{1}{1+t} (5t-2)(t-1)$$

t は $0 < t < 1$ を満たすので, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ となるのは $t = \frac{2}{5}$.

得点	
----	--

数 学

理工 4

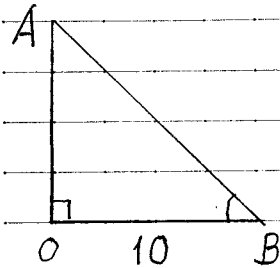
氏名	
----	--

受験番号	
------	--

- 4 OB=10, $\angle AOB = 90^\circ$ を満たす三角形 OAB を考える。このとき $\frac{\sin \angle ABO}{AB^2}$ を最大にする OA の長さを求めよ。またそのときの $\frac{\sin \angle ABO}{AB^2}$ の値を求めよ。

[解答欄]

$OA = a$ とおく。



$$AB^2 = 100 + a^2, \quad \sin \angle ABO = \frac{OA}{AB} = \frac{a}{\sqrt{100 + a^2}}$$

ゆえに $\frac{\sin \angle ABO}{AB^2} = \frac{a}{(100 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = f(a)$ とおく。

このとき

$$f'(a) = \left(a(100 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \right)' = (100 + a^2)^{-\frac{3}{2}} + a \cdot \frac{-3}{2} (100 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2a$$

$$= (100 + a^2)^{-\frac{5}{2}} (100 + a^2 - 3a^2)$$

$$= \frac{-2}{(100 + a^2)^{\frac{5}{2}}} (a^2 - 50) = \frac{-2}{(100 + a^2)^{\frac{5}{2}}} (a - 5\sqrt{2})(a + 5\sqrt{2})$$

a	0		$5\sqrt{2}$	
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$	0	↗		↘

よって $f(a)$ は $a = OA = 5\sqrt{2}$ のとき

最大値 $f(5\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{(150)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{5^2 \cdot 6\sqrt{6}}$

$$= \frac{1}{150\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{450} \text{ とおく。}$$

得点	
----	--

5

a を正の定数、 e を自然対数の底とし、 $f(x) = \{x^2 - (a+1)x + 2a - 1\}e^{-x}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が $x \geq 0$ において最小値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。ただし、 $x > 0$ のとき不等式 $e^x > \frac{x^3}{6}$ が成り立つことを用いてよいとする。

(2) $a = \frac{1}{2}$ のとき、定積分 $\int_0^1 |f(x)| dx$ を求めよ。

[解答欄]

(1) まず $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ を示す。 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ は明らか。不等式 $e^x > \frac{x^3}{6} (x > 0)$ を用い、

$$0 < xe^{-x} = \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{x^3}{6}} = \frac{6}{x^2} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty), \quad 0 < x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} < \frac{x^2}{\frac{x^3}{6}} < \frac{6}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$$

$$\text{より } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \quad \text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$f'(x) = \{2x - (a+1)\}e^{-x} - \{x^2 - (a+1)x + 2a - 1\}e^{-x} = \{-x^2 + (a+3)x - 3a\}e^{-x} \\ = -(x-3)(x-a)e^{-x} \quad \text{よって } a \text{ の値により } f(x) \text{ の増減を場合分けする。}$$

① $0 < a < 3$ のとき

x	0	a	3	
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		↘	↗	↘

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ を考慮すると、 $f(a) = (a-1)e^{-a}$ が $x \geq 0$ での最小値となるためには、
 $f(a) \leq 0$ すなわち $a \leq 1$

② $3 < a$ のとき

x	0	3	a	
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		↘	↗	↘

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ より、 $f(3) = (5-a)e^{-3}$ が $x \geq 0$ での最小値となるためには、 $f(3) \leq 0$ 、すなわち $5 \leq a$

③ $a = 3$ のとき

x	0	3	
$f'(x)$		-	-
$f(x)$		↘	↘

$f(x)$ の最小値はなし。

①②③より $f(x)$ が $x \geq 0$ において最小値をもつのは、 $0 < a \leq 1$ または $5 \leq a$

(2) $a = \frac{1}{2}$ のとき $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} < 0$ 、よって①の増減表から、 $0 \leq x \leq 1$ では $f(x) \leq 0$

$$\text{したがって } \int_0^1 |f(x)| dx = -\int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 (x^2 - \frac{3}{2}x) e^{-x} dx = \left[(x^2 - \frac{3}{2}x) e^{-x} \right]_0^1$$

$$-\int_0^1 (2x - \frac{3}{2}) e^{-x} dx = \frac{1}{2}e^{-1} + \left[(2x - \frac{3}{2}) e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x} dx = \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{3}{2} + \left[2e^{-x} \right]_0^1 \\ = 2e^{-1} - \frac{1}{2}.$$